لتكن $A, B \subseteq M$ مودول

$$A+B = \{a+b ; a \in A , b \in B\}$$

إذا كانت $A \cap B = 0$ — $A \oplus B = A + B$ جمع مباشر

نقول أن $M = A \oplus B$ إذا تحقق الشرط

الجمع المباشر :

تعريف :

لتكن A جبر لي فوق الحقل F و A, B مثاليين في A، نقول أن A مجموع مباشر للمثاليين K, D إذا تحقق

1) $A = K + B$

2) $K \cap D = 0$ ونعبر عن ذلك $A = K \oplus D$

تعريف :

لتكن A جبر لي فوق ~~[illegible]~~ الحلقة

$$Z(A) = \{a ; a \in A ; [a, x] = 0 \ \forall x \in B\}$$

تعريف :

لتكن A جبر لي فوق الحلقة R و B مثالية في ~~A~~ A . نسمي الجوهرة

$$Z_A(B) = \{a ; a \in A \ [a, x] = 0 \ \forall x \in B\}$$

نبرهن A في B

إن $Z_A(B)$ تشكل مثالية في A

تعريف :

لتكن A جبر لي فوق الحلقة R و B مثالية في A نقول إن ~~المثالية~~ المثالي B تامة في A إذا كانت

$$Z_A(B) = 0$$

$$Der(B) = Inn(B)$$

مبرهنة:

ليكن A جبر لي على الحقل F عندئذٍ لأجل أي مثالي تام B في A فإن

$$A = B \oplus Z(B)$$

البرهان:

لدينا كل من $Z_A(B)$ و B مثالي في A ومنه إذاً

$$B + Z_A(B) \subseteq A$$

مثالي في A

ليكن $a \in A$ عندئذٍ فإن العلاقة

$$d_a : A \longrightarrow A$$

$$\forall x \in A \quad d_a(x) = [a, x]$$

تطبيق الاشتقاق في ~~A~~ للجبر A

لنأخذ تقصير d_a على B ونرمز له d'_a

$$d'_a : B \longrightarrow A$$

وبما أن B مثالية في A فإن

$$d_a(B) \subseteq B$$

ومنه فإن

$$d'_a : B \longrightarrow B$$

تطبيق اشتقاق على B

$$\forall x, y \in B$$

$$d'_a(x+y) = d_a(x+y) = [a, x+y] = [a, x] + [a, y]$$
$$= d_a(x) + d_a(y)$$
$$= d'_a(x) + d'_a(y)$$

$$\forall \alpha \in F \quad \forall x \in B$$

$$d'_a(\alpha x) = d_a(\alpha x) = \alpha\, d_a(x) = \alpha\, d'_a(x)$$

$d_a[x,y] = d_a[x,y] = [d_a(x), y] + [x, d_a(y)]$

$= [\dot{d_a}(x), y] + [x, \dot{d_a}(y)]$

$\dot{d_a}$ تطبيق اشتقاقي على B ومنه يأتي

$\dot{d_a} \in Der(B) = Inn(B)$

وبالتالي يوجد $b \in B$ بحيث $\dot{d_a} = d_b$ ومنه يأتي من أجل $x \in B$ يأتي

$\dot{d_a}(x) = d_b(x)$

$d_a(x) = d_b(x) \Rightarrow [a,x] = [b,x]$

$\Rightarrow [a-b, x] = 0 \quad \forall x \in B$

ومنه يأتي

$a-b \in Z_A(B) = 0$

وبالتالي يوجد $c \in Z_A(B)$ بحيث

$a-b = c$

$a = b + c \in B + Z_A(B)$

أي أن

$A \subseteq B + Z_A(B)$

$A = B + Z_A(B)$

لنرهن أن $B \cap Z_A(B) \subseteq Z(B) = 0$

$Z_A(B) = \{ a ; a \in A \ldots$

ومنه $A = B + Z_A(B)$